

Chapitre M : Fonctions convexes


HEI 2 - 2015/2016 - A. RIDARD

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
 - le menu (en haut à gauche)
 - l'icône en dessous du logo HEI
 - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@hei.fr

Prérequis

- Calcul vectoriel
- Fonctions d'une variable réelle

Pour tester vos prérequis, un QCM vous attend sur 

Plan du cours

- 1 Parties convexes d'un \mathbb{R} -ev
 - Barycentre
 - Partie convexe

- 2 Fonctions convexes d'une variable réelle
 - Définition
 - Caractérisations

- 1 Parties convexes d'un \mathbb{R} -ev
- 2 Fonctions convexes d'une variable réelle

Dans cette section, E désigne un \mathbb{R} -ev muni de sa structure affine naturelle, autrement dit les éléments de E , qui sont des vecteurs, sont vus comme des points.

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^2$, le vecteur $(1, 2)$ de coordonnées 1 et 2 dans la base canonique (\vec{i}, \vec{j}) désigne aussi le point de coordonnées 1 et 2 dans le repère canonique $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Notation : Si x et y sont des éléments de E , on note $\overrightarrow{xy} = y - x$.

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^2$, si $A = (1, 2)$ et $B = (3, 5)$, alors $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3)$.

- 1 Parties convexes d'un \mathbb{R} -ev
 - Barycentre
 - Partie convexe
- 2 Fonctions convexes d'une variable réelle
 - Définition
 - Caractérisations

On considère un entier $n \geq 2$, une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de E et une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels.

On dit que la famille $((a_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$ est un **système de points pondérés** de E .

Propriété

Soit m un point de E .

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ma_i}$ est indépendant du point m .

Définition (Barycentre)

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$, alors le point g défini par $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \vec{0}$ est appelé le barycentre du système $((a_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$.

On note $g = \text{Bar}((a_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Remarque : En notation affine, on a : $g = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$

Exemples

Déterminer le barycentre lorsqu'il existe.

- 1 $E = \mathbb{R}^2$ et $((a_1, -2), (a_2, -1), (a_3, 3))$ avec $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (3, 4)$ et $a_3 = (2, -2)$
- 2 $E = \mathbb{R}^2$ et $((a_1, -2), (a_2, 1), (a_3, 3), (a_4, 5))$ avec $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (3, 4)$, $a_3 = (-3, 0)$ et $a_4 = (2, -2)$

Définition (Isobarycentre)

Si pour tout i , $\lambda_i = \lambda \neq 0$, $g = \text{Bar}((a_i, \lambda))_{1 \leq i \leq n}$ est appelé l'isobarycentre du système.

Remarque : Si $\lambda \neq 0$, alors $\text{Bar}((a_i, \lambda))_{1 \leq i \leq n} = \text{Bar}((a_i, 1))_{1 \leq i \leq n}$

Exemples

Que représente géométriquement l'isobarycentre ?

- 1 $E = \mathbb{R}^2$ et $((a_1, 2), (a_2, 2))$ avec $a_1 = (1, 0)$ et $a_2 = (1, 4)$
- 2 $E = \mathbb{R}^2$ et $((a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 1))$ avec $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (4, 0)$ et $a_3 = (3, 2)$

Propriété : Caractérisation vectorielle

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$, alors on a :

$$g = \text{Bar}((a_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n} \iff \forall m \in E, \overrightarrow{mg} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ma_i}$$

Propriété : Associativité

On suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ et on note $g = \text{Bar}((a_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$.

On considère une partition^a (I_1, I_2) de $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\sum_{i \in I_1} \lambda_i \neq 0$ et

$$\sum_{i \in I_2} \lambda_i \neq 0.$$

On note enfin $g_1 = \text{Bar}((a_i, \lambda_i))_{i \in I_1}$ et $g_2 = \text{Bar}((a_i, \lambda_i))_{i \in I_2}$.

Alors $g = \text{Bar}((g_1, \alpha_1), (g_2, \alpha_2))$ avec $\alpha_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i$ pour $k \in \{1, 2\}$.

a. $I_1 \cup I_2 = I$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et g l'isobarycentre de $((a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 1))$ avec $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (4, 0)$ et $a_3 = (3, 2)$.

Montrer que $g = \frac{1}{3}(a_1 + 2m)$ avec m le milieu du segment $[a_2, a_3]$.

- 1 Parties convexes d'un \mathbb{R} -ev
 - Barycentre
 - Partie convexe

- 2 Fonctions convexes d'une variable réelle
 - Définition
 - Caractérisations

Définition (Segment)

Soit $(a, b) \in E^2$.

On appelle segment d'extrémités a et b , noté $[a, b]$, l'ensemble des barycentres du système $((a, \lambda), (b, \mu))$ avec $\lambda + \mu \neq 0$, $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$.

Remarque : $[a, b] = \left\{ \frac{1}{\lambda + \mu}(\lambda a + \mu b) \mid \lambda + \mu \neq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0 \right\} =$
 $\left\{ \lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in [0, 1] \right\} = \left\{ m \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1], m = \lambda a + (1 - \lambda)b \right\}$

Définition (Partie convexe)

Soit A une partie non vide de E .

On dit que A est convexe si pour tout $(a, b) \in A^2$, $[a, b] \subset A$.

Exemples

Représenter une partie convexe et une partie non convexe de \mathbb{R}^2 .

Remarque : Une partie de E est convexe si et seulement si elle est stable par "barycentration" positive.

- 1 Parties convexes d'un \mathbb{R} -ev
- 2 Fonctions convexes d'une variable réelle

Dans cette section, f désigne une fonction réelle définie sur un intervalle non vide I de \mathbb{R} , et sa courbe représentative dans un repère du plan est notée \mathcal{C} .

- 1 Parties convexes d'un \mathbb{R} -ev
 - Barycentre
 - Partie convexe

- 2 Fonctions convexes d'une variable réelle
 - Définition
 - Caractérisations

Définition (fonction convexe/concave)

- 1 On dit que f est convexe sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

- 2 On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I .

Interprétation graphique : ?

Propriété : Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur I , $n \geq 2$ un entier, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$
et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in]0, 1[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

$$\text{Alors, } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

- 1 Parties convexes d'un \mathbb{R} -ev
 - Barycentre
 - Partie convexe

- 2 Fonctions convexes d'une variable réelle
 - Définition
 - Caractérisations

Définition (Epigraphe)

On appelle épigraphe de f , noté $Ep(f)$, l'ensemble défini par :

$$Ep(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

Propriété : Caractérisation géométrique

La fonction f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Exemples

Représenter une fonction convexe et une fonction non convexe sur $[0, 10]$.

Propriété : Caractérisation analytique

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 f est convexe sur I
- 2 Pour tout $(x_1, x_2, x) \in I^3$,
$$\left(x_1 \leq x \leq x_2 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \right)$$
- 3 Pour tout $a \in I$, la fonction $p_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

Exemple

Soit f une fonction convexe, croissante et non constante sur $]0, +\infty[$.

On considère la fonction $p : x \mapsto \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

- 1 Montrer qu'il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $p(a) > 0$.
- 2 Montrer que pour tout $x > \max(1, a)$, $f(x) \geq (x-1)p(a) + f(1)$.
- 3 En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Propriété : Régularité d'une fonction convexe

Soit f une fonction convexe sur I et $a \in \overset{\circ}{I}$ (a est à "l'intérieur" de I).
Alors,

- 1 f est dérivable à gauche et à droite en a , et pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, on a :

$$x_1 \leq a \leq x_2 \Rightarrow p_a(x_1) \leq f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq p_a(x_2)$$

- 2 f est continue sur $\overset{\circ}{I}$

Propriété : Caractérisation pour une fonction dérivable

Soit f une fonction **dérivable** sur I . Alors,
 f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff \mathcal{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes.

Propriété : Caractérisation pour une fonction deux fois dérivable

Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur I . Alors,
 f est convexe sur $I \iff f''$ est positive sur I .

Exemple

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

Fin du cours

Pour tester vos connaissances, un QCM vous attend sur 